Derivazione della formula di Eulero per la riduzione del triangolo sferico (Gianpietro Favaro - 2012)

Gli elementi necessari per la risoluzione del triangolo sferico sono:

1. il teorema di Carnot
2. il teorema di Pitagora

Problema: si vuole determinare l'angolo allo Zenith (sferico) ricorrendo solamente agli angoli definiti al centro della sfera (90-H, 90-DEC, 90-LAT).

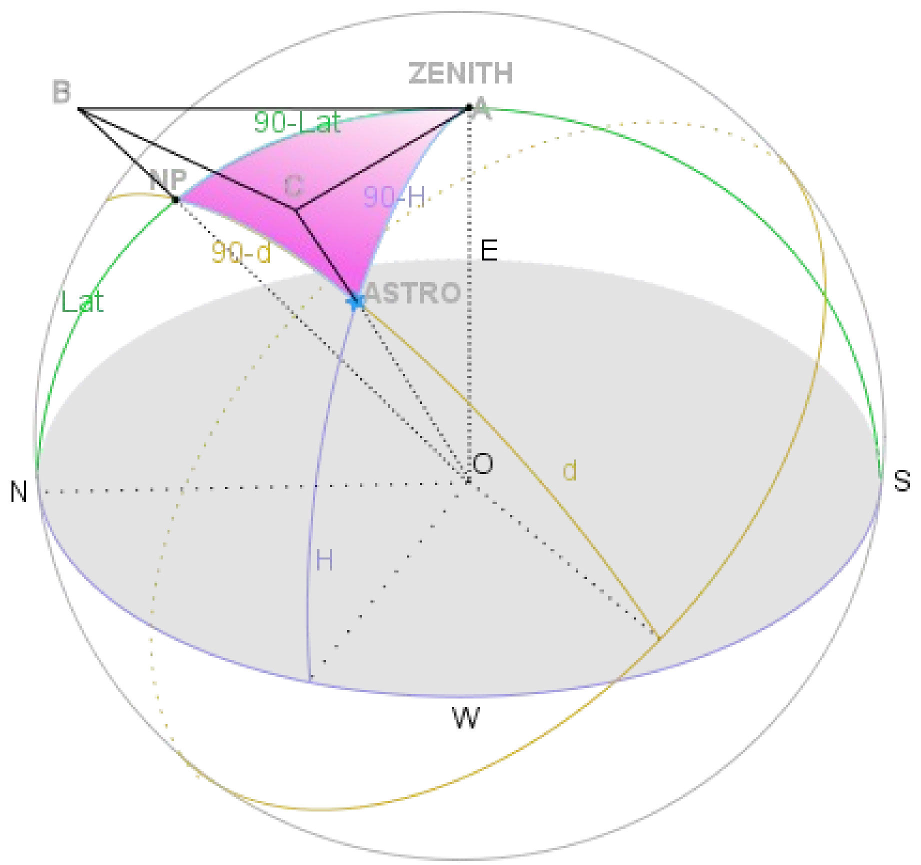

Fig. 1: Triangolo Astronomico

Soluzione

Si faccia riferimento alla figura 2.

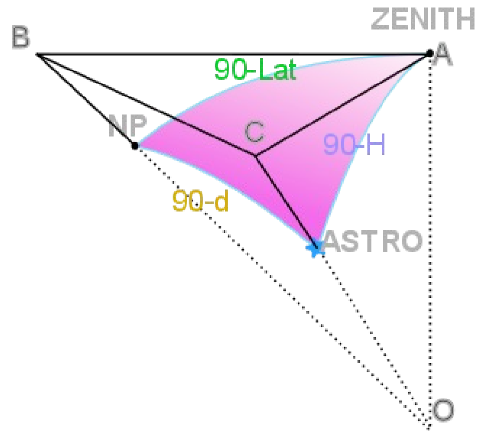

Fig. 2: Elementi del Triangolo Astronomico

Si definiscono gli elementi seguenti:

1. il triangolo t(ABC)
2. L'angolo sferico as(BAC), angolo allo Zenith, 360-*Az*, dove *Az* è l'angolo orario ($\cos(A_z)=\cos(360-A_z)$)
3. L'angolo piano ap(COA)=90-H
4. L'angolo piano ap(BOC)=90-DEC
5. L'angolo piano ap(BOA)=90-LAT

Per il triangolo t(ABC), in genere scaleno, vale il teorema di Carnot:

$$1)\quad \overline{BC}^2=\overline{BA}^2+\overline{CA}^2-2\cdot\overline{BA}\cdot\overline{CA}\cdot\cos(B\hat{A}C)=\overline{BA}^2+\overline{CA}^2-2\cdot\overline{BA}\cdot\overline{CA}\cdot\cos(A_z)$$

Analogamente, per il triangolo t(BOC), vale la seguente:

$$2)\quad \overline{BC}^2=\overline{BO}^2+\overline{CO}^2-2\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot\cos(B\hat{O}C)=\overline{BO}^2+\overline{CO}^2-2\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot\cos(90-DEC)$$

Sottraendo 2 da 1:

$$0=\overline{BA}^2-\overline{BO}^2+\overline{CA}^2-\overline{CO}^2-2\cdot\overline{BA}\cdot\overline{CA}\cdot\cos(A_z)+2\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot\cos(90-DEC)$$

I triangoli t(CAO) e t(BAO) sono rettangoli in A in quanto le linee BA e CA sono tangenti alla sfera in A. Quindi, $\overline{BA}^2-\overline{BO}^2=-1$ e, analogamente, $\overline{CA}^2-\overline{CO}^2=-1$.

Pertanto:

$$3)\quad 0=-1-1-2\cdot\overline{BA}\cdot\overline{CA}\cdot\cos(A_z)+2\cdot\overline{BO}\cdot\overline{CO}\cdot\cos(90-DEC)$$

Ora, il segmento $\overline{BA}=\tan(90-LAT)$, mentre $\overline{CA}=\tan(90-H)$, inoltre per i segmenti $\overline{BO}$ e $\overline{CO}$ valgono le seguenti (teorema di Pitagora):

$$\overline{BO}^2=\tan(90-LAT)^2+1=\frac{\sin(90-LAT)^2}{\cos(90-LAT)^2}+1=\frac{\sin(90-LAT)^2+\cos(90-LAT)^2}{\cos(90-LAT)^2}=\frac{1}{\cos(90-LAT)^2}$$

$$\overline{CO}^2=\tan(90-H)^2+1=\frac{\sin(90-H)^2}{\cos(90-H)^2}+1=\frac{\sin(90-H)^2+\cos(90-H)^2}{\cos(90-H)^2}=\frac{1}{\cos(90-H)^2}$$

$$\overline{BO}=\frac{1}{\cos(90-LAT)},\overline{CO}=\frac{1}{\cos(90-H)}$$

Sostituendo in 3):

$$0=-2-2\cdot\tan(90-LAT)\cdot\tan(90-H)\cdot\cos(A_z)+2\cdot\frac{1}{\cos(90-LAT)}\cdot\frac{1}{\cos(90-H)}\cdot\cos(90-DEC)$$

Isolando A_z ,

$$\frac{\sin(90-LAT)}{\cos(90-LAT)}\cdot\frac{\sin(90-H)}{\cos(90-H)}\cdot\cos(A_z)=\frac{\cos(90-DEC)}{\cos(90-LAT)\cdot\cos(90-H)}-1$$

L'equazione è della forma:

$$\frac{M}{N}\cdot\cos(A_z)=\frac{K}{N}-1=\frac{K-N}{N}$$

pertanto:

$$\cos(A_z)=\frac{N}{M}\cdot\frac{K-N}{N}=\frac{K-N}{M}$$

ottenendo infine:

$$\cos(A_z)=\frac{\cos(90-DEC)-\cos(90-LAT)\cdot\cos(90-H)}{\sin(90-LAT)\cdot\sin(90-H)}$$

$$A_z=\arccos(\frac{\sin(DEC)-\sin(LAT)\cdot\sin(H)}{\cos(LAT)\cdot\cos(H)})$$

Marzo, 2012